ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2017, № 3-4

УДК 004.42:510.69

М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
вул. Володимирська, 60, м. Київ, 01601

СЕМАНТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЛОГІК ЗАГАЛЬНИХ НЕДЕТЕРМІНОВАНИХ ПРЕДИКАТІВ

M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
60, Volodymyrska st., Kyiv, 01601

SEMANTIC PROPERTIES OF LOGICS OF GENERAL NON-DETERMINISTIC PREDICATES

Запропоновано та досліджено новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – логіки загальних недетермінованих квазіарних предикатів (*GND*-предикатів). Такі предикати є узагальненням часткових неоднозначних предикатів реляційного типу. Показано зв'язок *GND*-предикатів із *7*-значними тотальними детермінованими предикатами. Розглянуто композиції *GND*-предикатів, наведено їх характерні властивості. Описано мови чистих першопорядкових логік *GND*-предикатів та їх інтерпретації. Визначено відношення логічного *G*-наслідку, доведено його монотонність та властивості декомпозиції формул.

Ключові слова: логіка, предикат, квазіарний предикат, недетермінований предикат, логічний наслідок.

A new class of program-oriented logical formalisms - the logics of general non-deterministic quasiary predicates (*GND*-predicates) – is proposed and investigated. Such predicates are a generalization of partial non-deterministic predicates of relational type. The relationship between *GND*-predicates and 7-valued total deterministic predicates is shown. Compositions of *GND*-predicates are considered; their characteristic properties are presented. The languages of pure first-order logics of *GND*-predicates and their interpretations are described. The *G*-consequence relation is defined, its monotonicity is investigated, and the properties of the formulas decompositions are proved.

Key words: logic, predicate, quasiary predicate, non-deterministic predicate, logical consequence.

Вступ

Розроблено багато різноманітних логічних систем, які успішно використовуються в системах штучного інтелекту та в програмуванні (див., напр., [1]). Такі системи, зазвичай, базуються на класичній логіці предикатів. Ця логіка добре досліджена, вона має багатий досвід застосування. На основі класичної будуються спеціальні логіки, орієнтовані на вирішення тих чи інших конкретних задач. Водночас поява нових застосувань логіки в інформаційних технологіях висвітила принципові обмеження класичної логіки предикатів, які ускладнюють її використання. Така логіка базується на традиційних математичних структурах однозначних тотальних скінченно-арних відображень, а для програмування та систем штучного інтелекту характерним є використання часткових недетермінованих відображень над неповними даними. Тому на перший план висувається проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів, базованих на цих відображеннях. Низку таких формалізмів описано в [2–4]. У даній роботі ми пропонуємо нові класи програмно-орієнтованих логічних формалізмів: композиційно-номінативні логіки загальних недетермінованих предикатів. Вони є подальшим узагальненням логік часткових та недетермінованих предикатів [5–9]. Такі логіки можна розглядати як певні універсальні логіки [10, 11].

У [2–4] часткові недетерміновані (неоднозначні) предикати ми трактували як відповідності (відношення) між множиною даних ${}^{V}A$ (${}^{V}A$ – множина часткових відображень із V в A) та множиною істиннісних значень $\{T, F\}$. Їх названо квазіарними

предикатами реляційного типу, або *R*-предикатами. Позначимо $P[d]$ множину значень, які предикат $P:{}^{V}A \rightarrow \{T,F\}$ може прийняти на даному $d\in{}^{V}A$. Маємо $P[d]\subseteq\{T,F\}$, тому для *R*-предикатів $P[d]$ може бути одним із $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T,F\}$.

Кожний *R*-предикат *P* однозначно задається за допомогою 2-х множин: область істинності $T(P) = \{d\in{}^{V}A \mid T\in P[d]\}$ та область хибності $F(P) = \{d\in{}^{V}A \mid F\in P[d]\}$.

У цій статті ми природним чином узагальнимо поняття недетермінованого предиката. Будемо вважати, що недетермінований предикат $P:{}^{V}A \rightarrow \{T,F\}$ при застосуванні до даного $d\in{}^{V}A$ може набувати значення *T*, значення *F*, або не набувати жодного значення (бути невизначеним). Зрозуміло, що для кожного $d\in{}^{V}A$ має бути хоч одна з цих можливостей. Такі загальні недетерміновані квазіарні предикати назвемо *GND-предикатами*.

Поняття загального недетермінованого предиката можна пояснити наступним чином. Уявімо складний предикат-механізм, утворений із базових предикатів-механізмів за допомогою певних засобів (композицій). Такий складний предикат може містити багато екземплярів одного і того ж базового предиката. На деяких даних через нечіткість та невизначеність інформації базовий предикат може функціонувати недетермінованим чином: на одному і тому ж даному одні екземпляри можуть набувати значення *T*, інші екземпляри – значення *F*, а деякі його екземпляри можуть не набувати жодного значення. Тому композиції таких недетермінованих предикатів як засоби побудови складніших предикатів із простіших мають враховувати ці особливості.

Загальні недетерміновані квазіарні предикати вперше згадані в [12]. У даній роботі будемо вивчати семантичні властивості логік загальних квазіарних недетермінованих предикатів. Огляд недетермінованих пропозиційних логік та логік недетермінованих *n*-арних предикатів наведено в [9].

Поняття, які в цій статті не визначені, тлумачимо в сенсі [2–4].

Недетерміновані квазіарні предикати та їх композиції

Кожний *GND*-предикат *P* можна однозначно описати за допомогою 3-х множин:
– області істинності $T(P) = \{d \mid P$ може набувати на d значення $T\}$,
– області хибності $F(P) = \{d \mid P$ може набувати на d значення $F\}$,
– області невизначеності $\bot(P) = \{d \mid P$ може бути невизначеним на $d\}$.

При цьому має виконуватись умова $F(P)\cup T(P)\cup\bot(P) = {}^{V}A$.

Клас *V-A*-квазіарних *GND*-предикатів позначимо $PrG_{V\text{–}A}$.

Опишемо пропозиційні композиції (логічні зв’язки) квазіарних *GND*-предикатів.

Традиційні пропозиційні композиції $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ та & задамо через області істинності, хибності та невизначеності відповідних предикатів:

$T(\neg P) = F(P),\ F(\neg P) = T(P),\ \bot(\neg P) = \bot(P);$

$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q),\ F(P\vee Q) = F(P)\cap F(Q),$

$\bot(P\vee Q) = (F(P)\cap\bot(Q))\cup(\bot(P)\cap F(Q))\cup(\bot(P)\cap\bot(Q));$

$T(P\&Q) = T(P)\cap T(Q),\ F(P\&Q) = F(P)\cup F(Q),$

$\bot(P\&Q) = (T(P)\cap\bot(Q))\cup(\bot(P)\cap T(Q))\cup(\bot(P)\cap\bot(Q));$

$T(P\rightarrow Q) = F(P)\cup T(Q),\ F(P\rightarrow Q) = T(P)\cap F(Q),$

$\bot(P\rightarrow Q) = (T(P)\cap\bot(Q))\cup(\bot(P)\cap F(Q))\cup(\bot(P)\cap\bot(Q)).$

При визначенні $\bot(P\vee Q)$ беремо до уваги, що $P\vee Q$ невизначений на d $\Leftrightarrow$ P та Q невизначені на d або P невизначений на d та Q хибний на d або Q невизначений на d та P хибний на d. Подібним чином обґрунтовуємо визначення $\bot(P\&Q)$ та $\bot(P\rightarrow Q)$.

$\vee$ та $\neg$ – це *базові* композиції *GND*-предикатів на пропозиційному рівні.

Композиції → та & є *похідними*, вони задаються через ∨ та ¬:

$$P \to Q = \neg P \vee Q \quad \text{та} \quad P\&Q = \neg(\neg P \vee Q).$$

Нехай $P[d]$ – множина значень, які *GND*-предикат *P* може прийняти на $d \in {}^{V}A$, тоді $P[d]$ може бути одним із $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$, $\{T, \varnothing\}$, $\{F, \varnothing\}$, $\{T, F, \varnothing\}$.

Скорочено позначимо ці значення ↑, *T*, *F*, *TF*, *T*↑, *F*↑, *TF*↑.

Таким чином, *GND*-предикати можна моделювати як *7-значні тотальні детерміновані предикати*, назвемо їх *TD*7-*предикатами*.

Клас *V*-*A*-квазіарних *TD*7-предикатів позначимо $PrTD7_{V\text{–}A}$.

Для опису *TD*7-предикатів задамо для них композиції $\neg_*$, $\vee_*$, $\to_*$ та $\&_*$:

P	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
$\neg_*$P	*F*	*T*	*TF*	↑	*F*↑	*T*↑	*TF*↑

$P \vee_* Q$	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
TF	*T*	*TF*	*TF*	*T*↑	*T*↑	*TF*↑	*TF*↑
↑	*T*	↑	*T*↑	↑	*T*↑	↑	*T*↑
T↑	*T*	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑
F↑	*T*	*F*↑	*TF*↑	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
TF↑	*T*	*TF*↑	*TF*↑	*T*↑	*T*↑	*TF*↑	*TF*↑

$P \to_* Q$	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
T	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
F	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
TF	*T*	*TF*	*TF*	*T*↑	*T*↑	*TF*↑	*TF*↑
↑	*T*	↑	*T*↑	↑	*T*↑	↑	*T*↑
T↑	*T*	*F*↑	*TF*↑	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
F↑	*T*	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑
TF↑	*T*	*TF*↑	*TF*↑	*T*↑	*T*↑	*TF*↑	*TF*↑

$P \&_* Q$	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
T	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
TF	*TF*	*F*	*TF*	*F*↑	*TF*↑	*F*↑	*TF*↑
↑	↑	*F*	*F*↑	↑	↑	*F*↑	*F*↑
T↑	*T*↑	*F*	*TF*↑	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
F↑	*F*↑	*F*	*F*↑	*F*↑	*F*↑	*F*↑	*F*↑
TF↑	*TF*↑	*F*	*TF*↑	*F*↑	*TF*↑	*F*↑	*TF*↑

Композиції $\neg_*$ та $\vee_*$ візьмемо як *базові* пропозиційні композиції *TD*7-предикатів.

Композиції $\to_*$ та $\&_*$ є похідними, вони задаються через $\neg_*$ та $\vee_*$ традиційним чином: $P \to_* Q = \neg P \vee_* Q$ та $P \&_* Q = \neg_*(\neg_* P \vee_* Q)$.

Композиційну алгебру $P7_A^V = (PrTD7_{V\text{-}A}, CP_7)$, де $CP_7 = \{\neg_*, \vee_*\}$ – множина базових композицій, назвемо пропозиційною алгеброю *TD*7-предикатів.

Композиційну алгебру $PG_A^V = (PrG_{V\text{-}A}, CP)$, де $CP = \{\neg, \vee\}$ – множина базових композицій, назвемо пропозиційною алгеброю *GND*-предикатів.

Теорема 1. Композиційні алгебри PG_A^V та $P7_A^V$ ізоморфні.

Розглянемо характерні властивості *GND*-предикатів.

Твердження 1. Із визначень отримуємо такі співвідношення:

– $d \notin \bot(P \vee Q) \Leftrightarrow (d \notin F(P)$ та $d \notin \bot(P))$ або $(d \notin \bot(P)$ та $d \notin \bot(Q))$ або $(d \notin F(Q)$ та $d \notin \bot(Q))$;

– $d \notin \bot(P \& Q) \Leftrightarrow (d \notin T(P)$ та $d \notin \bot(P))$ або $(d \notin \bot(P)$ та $d \notin \bot(Q))$ або $(d \notin T(Q)$ та $d \notin \bot(Q))$;

– $T(P \vee Q) \cup \bot(P \vee Q) = T(P) \cup \bot(P) \cup T(Q) \cup \bot(Q)$;

– $F(P \vee Q) \cup \bot(P \vee Q) = (F(P) \cup \bot(P)) \cap (F(Q) \cup \bot(Q))$;

– $T(P \& Q) \cup \bot(P \& Q) = (T(P) \cup \bot(P)) \cap (T(Q) \cup \bot(Q))$;

– $F(P \& Q) \cup \bot(P \& Q) = F(P) \cup \bot(P) \cup F(Q) \cup \bot(Q)$.

Приклад 1. Збіжність областей істинності та хибності предикатів ще не означає збіжності областей невизначеності. Справді, маємо $T(P \& Q \vee P) = T((P \vee Q) \& P) = T(P)$, $F(P \& Q \vee P) = F((P \vee Q) \& P) = F(P)$, водночас: $\bot(P \& Q \vee P) = \bot((P \vee Q) \& P) = \bot(P) \cup (F(P) \cap T(P) \cap \bot(Q))$.

Це можна трактувати так, що при ускладненні опису предиката зростає невизначеність його функціонування (наростає ентропія опису). При переході від простого опису *P* до складнішого його опису із залученням *Q* до області невизначеності $\bot(P)$ додається компонента $F(P) \cap T(P) \cap \bot(Q)$, яка може бути непорожньою.

Таким чином, в класі *R*-предикатів *P*, $(P \vee Q) \& P$, $P \& Q \vee P$ збігаються, водночас в класі *G*-предикатів $(P \vee Q) \& P$ та $P \& Q \vee P$ збігаються, проте вони не збігаються із *P*.

Можна також показати:

Приклад 2. $\bot((P \& R) \vee (Q \& R)) = \bot((P \vee Q) \& R) \cup ((\bot(P) \cup \bot(Q)) \cap F(R) \cap T(R))$.

Твердження 2. Для *GND*-предикатів виконуються такі закони традиційної логіки:

1) Комутативність $\vee$ та &: $P \vee Q = Q \vee P$; $P \& Q = Q \& P$.

2) Асоціативність $\vee$ та &: $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$; $(P \& Q) \& R = P \& (Q \& R)$.

3) Зняття подвійного заперечення: $\neg\neg P = P$.

4) Ідемпотентність $\vee$ та &: $P = P \vee P$; $P = P \& P$.

5) Закони де Моргана: $\neg(P \vee Q) = \neg P \& \neg Q$; $\neg(P \& Q) = \neg P \vee \neg Q$.

Приклади 1 та 2 засвідчують: для *GND*-предикатів не виконуються такі важливі закони традиційної логіки як закон поглинання та закон дистрибутивності для $\vee$ і &.

Для *GND*-предикатів композицію *реномінації* $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ задаємо традиційно:

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)[d] = P[\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)] \text{ для всіх } d \in {}^{V}\!A.$$

Таку композицію $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ можна визначити через області істинності, хибності та невизначеності відповідного предиката $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$:

$$T(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \mid \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in T(P)\};$$

$$F(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \mid \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in F(P)\};$$

$$\perp(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \mid \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in \perp(P)\}.$$

Опишемо для *GND*-предикатів композиції *квантифікації* $\exists x$ та $\forall x$.

Задаємо предикат $\exists xP$ через його області істинності, хибності та невизначеності.

$$T(\exists xP) = \{d \mid d\nabla x \mapsto a \in T(P) \text{ для деякого } a \in A\};$$

$$F(\exists xP) = \{d \in {}^{V}A \mid d\nabla x \mapsto a \in F(P) \text{ для всіх } a \in A\};$$

$$\perp(\exists xP) = \{d \mid d\nabla x \mapsto a \in \perp(P) \cup F(P) \text{ для всіх } a \in A \text{ та } d\nabla x \mapsto b \in \perp(P) \text{ для деякого } b \in A\}.$$

Звідси отримуємо:

$d \notin (\exists xP) \Leftrightarrow d\nabla x \mapsto a \notin \perp(P) \cup F(P)$ для деякого $a \in A$ або $d\nabla x \mapsto b \notin \perp(P)$ для всіх $b \in A$.

Композиція $\forall x$ є похідною, її задаємо традиційним чином: $\forall xP = \neg\exists x\neg P$.

Твердження 3. $d \in \perp(\exists xP) \cup T(\exists xP) \Leftrightarrow d\nabla x \mapsto b \in T(P) \cup \perp(P)$ для деякого $b \in A$.

$d \in \perp(\exists xP) \cup F(\exists xP) \Leftrightarrow d\nabla x \mapsto a \in F(P) \cup \perp(P)$ для всіх $a \in A$.

Наслідок 1. $d \notin \perp(\exists xP) \cup T(\exists xP) \Leftrightarrow d\nabla x \mapsto a \notin T(P) \cup \perp(P)$ для всіх $a \in A$.

$d \notin \perp(\exists xP) \cup F(\exists xP) \Leftrightarrow d\nabla x \mapsto a \notin F(P) \cup \perp(P)$ для деякого $a \in A$.

Основні властивості композицій реномінації та квантифікації *GND*-предикатів такі ж, як для *R*-предикатів, див. [2, 3]. Наведемо властивості, пов'язані з реномінацією.

R) $\mathrm{R}(P) = P$ – тотожна реномінація.

RI) $\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

R∃R) $\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xP) = \mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)$.

RU) $\mathrm{R}_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, якщо *z* неістотне для *P*.

Ren) $\exists yP = \exists z\mathrm{R}_{z}^{y}(P)$, якщо *z* неістотне для *P*.

R¬) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

R∨) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \vee Q) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \vee \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$.

RR) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)$ – згортка реномінацій (див. [2, 3]).

R∃s) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists y\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

R∃) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists z\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{z}^{y}(P)$, якщо *z* неістотне для *P* та $z \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

Окремої уваги вимагають властивості елімінації кванторів. Для їх опису використовують спеціальні предикати-індикатори *Ez* наявності в даних компонентах з відповідним $z \in V$. Предикати-індикатори *Ez* тотальні та однозначні, задаємо їх так:

$$T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\},\ (Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\},\ \perp(Ez) = \varnothing.$$

Твердження 4. $\perp(\vartheta \vee Ez) = \perp(\vartheta) \cap F(Ez) = \perp(\vartheta) \cap \{d \mid d(z)\uparrow\}$;

$\perp(\vartheta \& Ez) = \perp(\vartheta) \cap T(Ez) = \perp(\vartheta_J) \cap \{d \mid d(z)\downarrow\}$;

$\perp(\vartheta \& Ez) \cup F(\vartheta \& Ez) = \perp(\vartheta) \cup F(\vartheta) \cup \{d \mid d(z)\uparrow\}$.

Дослідження властивостей елімінації кванторів опишемо в наступних роботах.

Композиційну алгебру $QG_A^V = (PrG_{V\text{-}A}, CQ)$, де $CQ = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ – множина базових композицій, назвемо чистою першопорядковою алгеброю *GND*-предикатів.

Описана в [3] алгебра *R*-предикатів QR_A^V є вкладенням в алгебру QG_A^V.

В алгебрі QR_A^V виділено [3] підалгебри *P*-предикатів QP_A^V, *T*-предикатів QT_A^V, *TS*-предикатів QTS_A^V; вони є також підалгебрами алгебри QG_A^V.

Виділення різних класів *GND*-предикатів та дослідження підалгебр алгебри QG_A^V буде проведене в наступних роботах.

Мови чистих першопорядкових логік *GND*-предикатів та їх інтерпретації

Семантичними моделями чистих першопорядкових логік *GND*-предикатів є чисті першопорядкові композиційні системи *GND*-предикатів, вони мають вигляд (A, $PrG_{V\text{–}A}$, CQ). Кожна така композиційна система задає дві алгебри: алгебру даних (A, $PrG_{V\text{–}A}$) та композиційну алгебру ($PrG_{V\text{–}A}$, CQ). Терми композиційної алгебри трактуємо як формули мови, це добре відома [2, 3] мова ЧКНЛ.

Алфавіт мови: множина V предметних імен (змінних), у якій виділена множина $U\subseteq V$ тотально неістотних імен; множина $Cs=\{\neg,\vee,R_{\bar{x}}^{\bar{v}},\exists x\}$ символів базових композицій; множина Ps предикатних символів (ПС) – сигнатура мови.

Розширена сигнатура мови – це $\Sigma = (V, U, Cs, Ps)$.

Для запису формул використовуємо префіксну форму запису.

Індуктивне визначення множини Fr формул:

– $Ps\subseteq Fr$; формули $p\in Ps$ – атомарні;

– $\Phi, \Psi\in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi\in Fr$.

Для зручності вживаємо скорочення формул, користуючись символами похідних композицій та інфіксною формою запису для бінарних композицій (див. [2]).

Інтерпретуємо мову на композиційних системах $CS = (A, PrG_{V\text{–}A}, CQ)$ *GND*-предикатів. Символи композицій позначають відповідні композиції, імена $x\in V$ – елементи множини базових даних A. Символи Ps позначають базові предикати в множині $PrG_{V\text{–}A}$, для опису цього позначення задамо тотальне однозначне відображення $I: Ps ® PrG_{V\text{–}A}$. Відображення інтерпретації формул $I: Fr ® PrG_{V\text{–}A}$ задамо як розширення відображення $I: Ps ® PrG_{V\text{–}A}$ згідно з побудовою формул із простіших за допомогою символів Cs:

$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$, $I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$, $I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi))$; $I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Трійки $J = (\mathrm{CS}, \Sigma, I)$ називають інтерпретаціями мови (сигнатури Σ).

Скорочено інтерпретації мови позначаємо як (A, Σ, I) чи (A, I).

Предикат $J(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації J – позначимо Φ_J.

Виділення підалгебр квазіарних предикатів виділяє відповідні класи інтерпретацій. Можна говорити про загальний клас *G*-інтерпретацій та про підкласи *R*-інтерпретацій, *P*-інтерпретацій, *T*-інтерпретацій, *TS*-інтерпретацій. Такі класи інтерпретацій називають [3] семантиками. Зокрема, можна говорити про *G*-семантику, *R*-семантику, *T*-семантику, *P*-семантику, *TS*-семантику логік квазіарних предикатів.

Відношення логічного наслідку

Спочатку введемо відношення *G*-наслідку $_J|\!=_G$ для двох формул при фіксованій інтерпретації J:

$\Phi\ _J|\!=_G \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\subseteq T(\Psi_J)$ та $F(\Psi_J)\subseteq F(\Phi_J)$ та

$\bot(\Phi_J)\subseteq\bot(\Psi_J)\cup T(\Psi_J)$ та $\bot(\Psi_J)\subseteq\bot(\Phi_J)\cup F(\Phi_J)$.

Неформально те, що Ψ_J є наслідком Φ_J означає: при переході від Φ_J до Ψ_J істинність може лише збільшитися, а хибність лише зменшитися, невизначеність переходить у невизначеність або істинність, у невизначеність переходить невизначеність або хибність.

Відношення логічного *G*-наслідку визначаємо так:

$\Phi \mid\!=_G \Psi$, якщо $\Phi\ _J|\!=_G \Psi$ для кожної інтерпретації J.

Теорема 2. Відношення ${}_J|\!=_G$ та ${}_J|\!=_G$ є рефлексивними й транзитивними.

Рефлексивність відношень ${}_J|\!=_G$ та $|\!=_G$ очевидна. Покажемо їх транзитивність.

Покажемо: $\Phi\ {}_J|\!=_G \Psi$ та $\Psi\ {}_J|\!=_G \vartheta \Rightarrow \Phi\ {}_J|\!=_G \vartheta$. Маємо:

$$T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J) \text{ та } T(\Psi_J) \subseteq T(\vartheta_J) \Rightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\vartheta_J);$$
$$F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J) \text{ та } F(\vartheta_J) \subseteq F(\Psi_J) \Rightarrow F(\vartheta_J) \subseteq F(\Phi_J).$$

Перевіримо умови для областей невизначеності. Маємо $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\Psi_J) \cup T(\Psi_J)$ та $\bot(\Psi_J) \subseteq \bot(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J)$, звідки $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J) \cup T(\Psi_J)$, проте $T(\Psi_J) \subseteq T(\vartheta_J)$, тому $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J)$.

Маємо $\bot(\Psi_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$ та $\bot(\vartheta_J) \subseteq \bot(\Psi_J) \cup F(\Psi_J)$, звідки отримуємо $\bot(\vartheta_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup F(\Phi_J) \cup F(\Psi_J)$, проте $F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)$, тому $\bot(\vartheta_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$.

Тепер покажемо: $\Phi\ |\!=_G \Psi$ та $\Psi\ |\!=_G \vartheta \Rightarrow \Phi\ |\!=_G \vartheta$.

Маємо: $\Phi\ |\!=_G \Psi$ та $\Psi\ |\!=_G \vartheta \Rightarrow$ (для всіх J маємо $\Phi\ {}_J|\!=_G \Psi$) та (для всіх J маємо $\Psi\ {}_J|\!=\vartheta_G$) $\Rightarrow$ для всіх J маємо $\Phi\ {}_J|\!=_G \Psi$ та $\Psi\ {}_J|\!=\vartheta_G \Rightarrow$ для всіх J маємо $\Phi\ {}_J|\!=_G \vartheta \Rightarrow \Phi\ |\!=_G \vartheta$.

Твердження 5. Закон контрапозиції для ${}_J|\!=_G$: $\Phi\ {}_J|\!=_G \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ {}_J|\!=_G \neg\Phi$.

Маємо $\Phi\ {}_J|\!=_G \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J)$ та $F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)$ та

$\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\Psi_J) \cup T(\Psi_J)$ та $\bot(\Psi_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup F(\Phi_J) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(\neg\Phi_J) \subseteq F(\neg\Psi_J)$ та $T(\neg\Psi_J) \subseteq T(\neg\Phi_J)$ та

$\bot(\neg\Phi_J) \subseteq \bot(\neg\Psi_J) \cup F(\neg\Psi_J)$ та $\bot(\neg\Psi_J) \subseteq \bot(\neg\Phi_J) \cup T(\neg\Phi_J) \Leftrightarrow \neg\Psi\ {}_J|\!=_G \neg\Phi$.

Наслідок 2. Закон контрапозиції для $|\!=_G$: $\Phi\ |\!=_G \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ |\!=_G \neg\Phi$.

Відношення логічного наслідку індукує відношення логічної еквівалентності.

Відношення G-еквівалентності при інтерпретації J визначаємо так:

$\Phi\ {}_J\!\sim_G \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J|\!=_G \Psi$ та $\Psi\ {}_J|\!=_G \Phi$.

Відношення логічної G-еквівалентності визначаємо так:

$\Phi \sim_G \Psi$, якщо $\Phi\ |\!=_G \Psi$ та $\Psi\ |\!=_G \Phi$.

Маємо: $\Phi \sim_G \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_J\!\sim_G \Psi$ для кожної інтерпретації J.

Твердження 6. $\Phi\ |\!=_G \Phi\&\Psi \vee \Phi$ та $\Phi \sim_G (\Phi\vee\Psi)\,\&\,\Phi$.

Покажемо $\Phi\ |\!=_G \Phi\&\Psi \vee \Phi$. Для кожної інтерпретації J маємо:

$\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\Phi_J\,\&\,\Psi_J \vee \Phi_J) \cup T(\Phi_J\,\&\,\Psi_J \vee \Phi_J) = \bot(\Phi_J) \cup (F(\Phi_J) \cap T(\Phi_J) \cap \bot(\Psi_J)) \cup T(\Phi_J)$;

$\bot(\Phi_J\,\&\,\Psi_J \vee \Phi_J) = \bot(\Phi_J) \cup (F(\Phi_J) \cap T(\Phi_J) \cap \bot(\Psi_J)) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$.

Покажемо $\Phi\&\Psi \vee \Phi\ |\!=_G \Phi$. Для кожної інтерпретації J маємо:

$\bot(\Phi_J\,\&\,\Psi_J \vee \Phi_J) = \bot(\Phi_J) \cup (F(\Phi_J) \cap T(\Phi_J) \cap \bot(\Psi_J)) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$;

$\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\Phi_J\,\&\,\Psi_J \vee \Phi_J) \cup F(\Phi_J\,\&\,\Psi_J \vee \Phi_J) = \bot(\Phi_J) \cup (F(\Phi_J) \cap T(\Phi_J) \cap \bot(\Psi_J)) \cup F(\Phi_J)$.

Таким чином, $\Phi \sim_G \Phi\&\Psi \vee \Phi$. Подібним чином показуємо: $\Phi \sim_G (\Phi\vee\Psi)\,\&\,\Phi$.

Твердження 7. Для GND-предикатів умова $\Phi \sim_G \vartheta$ ще не означає повну збіжність предикатів Φ_J та ϑ_J

Нехай $\Phi\ {}_J\!\sim_G \vartheta$. Тоді $T(\Phi_J) = T(\vartheta_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\vartheta_J)$, позначимо $T(\Phi_J)$ та $T(\vartheta_J)$ як T, $F(\Phi_J)$ та $F(\vartheta_J)$ як F.

Із $\Phi\ {}_J|\!=_G \vartheta$ маємо $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J)$ та $\bot(\vartheta_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$, Із $\vartheta\ {}_J|\!=_G \Phi$ маємо $\bot(\vartheta_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$ та $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\vartheta_J) \cup F(\vartheta_J)$. Отже, $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\vartheta_J) \cup \mathrm{T}$, $\bot(\vartheta_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup \mathrm{F}$, $\bot(\vartheta_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup \mathrm{T}$, $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\vartheta_J) \cup \mathrm{F}$.

Звідси $\bot(\Phi_J) \cap (\mathrm{T} \setminus \mathrm{F}) = \bot(\vartheta_J) \cap (\mathrm{T} \setminus \mathrm{F})$ та $\bot(\Phi_J) \cap (\mathrm{F} \setminus \mathrm{T}) = \bot(\vartheta_J) \cap (\mathrm{F} \setminus \mathrm{T})$.

Таким чином, якщо $\Phi\ {}_J\!\sim_G \vartheta$, то $\bot(\Phi_J)$ та $\bot(\vartheta_J)$ можуть відрізнятися лише в $\mathrm{T} \cap \mathrm{F}$. Як приклад такої відмінності див. $\bot(\Phi_J)$ та $\bot(\Phi_J\,\&\,\Psi_J \vee \Phi_J)$.

Теорема 3. Відношення ${}_J|\!=_G$ монотонне: $\Phi\ {}_J|\!=_G \vartheta \Rightarrow \Phi\&\mathrm{A}\ {}_J|\!=_G \vartheta\vee\mathrm{B}$.

Маємо: $T(\Phi_J) \subseteq T(\vartheta_J) \Rightarrow T(\Phi\&\mathrm{A}_J) = T(\Phi_J) \cap T(\mathrm{A}_J) \subseteq T(\vartheta_J) \cup T(\mathrm{B}_J) = T(\vartheta\vee\mathrm{B}_J)$;

$$F(\vartheta_J) \subseteq F(\Phi_J) \Rightarrow F(\vartheta \vee \mathrm{B}_J) = F(\vartheta_J) \cap F(\mathrm{B}_J) \subseteq F(\Phi_J) \cup F(\mathrm{A}_J) = F(\Phi \& \mathrm{A}_J).$$

Залишається перевірити умови для областей невизначеності.

За умовою маємо $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J)$ та $\bot(\vartheta_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$.

Маємо $\bot(\Phi\&\mathrm{A}_J) = (T(\Phi_J) \cap \bot(\mathrm{A}_J)) \cup (\bot(\Phi_J) \cap T(\mathrm{A}_J)) \cup (\bot(\Phi_J) \cap \bot(\mathrm{A}_J))$,

$\bot(\vartheta\vee\mathrm{B}_J) \cup T(\vartheta\vee\mathrm{B}_J) = T(\vartheta_J) \cup \bot(\vartheta_J) \cup T(\mathrm{B}_J) \cup \bot(\mathrm{B}_J)$,

$\bot(\vartheta\vee\mathrm{B}_J) = (F(\vartheta_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\vartheta_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\vartheta_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J))$,

$\bot(\Phi\&\mathrm{A}_J) \cup F(\Phi\&\mathrm{A}_J) = F(\Phi_J) \cup \bot(\Phi_J) \cup F(\mathrm{A}_J) \cup \bot(\mathrm{A}_J)$.

Покажемо $\bot(\Phi\&\mathrm{A}_J) \subseteq \bot(\vartheta\vee\mathrm{B}_J) \cup T(\vartheta\vee\mathrm{B}_J)$.

Маємо $(T(\Phi_J) \cap \bot(\mathrm{A}_J)) \subseteq T(\Phi_J) \subseteq T(\vartheta_J)$, $(\bot(\Phi_J) \cap T(\mathrm{A}_J)) \cup (\bot(\Phi_J) \cap \bot(\mathrm{A}_J)) \subseteq \bot(\Phi_J)$, $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J)$, звідки

$\bot(\Phi\&\mathrm{A}_J) = (T(\Phi_J) \cap \bot(\mathrm{A}_J)) \cup (\bot(\Phi_J) \cap T(\mathrm{A}_J)) \cup (\bot(\Phi_J) \cap \bot(\mathrm{A}_J)) \subseteq$

$\subseteq T(\vartheta_J) \cup \bot(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J) \subseteq \bot(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J) \cup T(\mathrm{B}_J) \cup \bot(\mathrm{B}_J) = \bot(\vartheta\vee\mathrm{B}_J) \cup T(\vartheta\vee\mathrm{B}_J)$.

Покажемо $\bot(\vartheta\vee\mathrm{B}_J) \subseteq \bot(\Phi\&\mathrm{A}_J) \cup F(\Phi\&\mathrm{A}_J)$.

Маємо $F(\vartheta_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \subseteq F(\vartheta_J) \subseteq F(\Phi_J)$, $(\bot(\vartheta_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\vartheta_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \subseteq \bot(\vartheta_J)$, $\bot(\vartheta_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$, звідки

$\bot(\vartheta\vee\mathrm{B}_J) = (F(\vartheta_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\vartheta_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\vartheta_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \subseteq F(\Phi_J) \cup \bot(\Phi_J) \cup F(\Phi_J) \subseteq$

$\subseteq F(\Phi_J) \cup \bot(\Phi_J) \cup F(\mathrm{A}_J) \cup \bot(\mathrm{A}_J) = \bot(\Phi\&\mathrm{A}_J) \cup F(\Phi\&\mathrm{A}_J)$.

Наслідок 3. Відношення $|=_G$ монотонне: $\Phi \,|=_G \vartheta \;\Rightarrow\; \Phi\&\mathrm{A} \,|=_G \vartheta\vee\mathrm{B}$.

Властивості декомпозиції формул. Теорема еквівалентності

Для відношень ${}_J|=_G$ та $|=_G$ виконуються властивості декомпозиції формул.

Теорема 4. $\mathrm{A}\vee\mathrm{B}\ {}_J|=_G \Phi \;\Leftrightarrow\; \mathrm{A}\ {}_J|=_G \Phi$ та $\mathrm{B}\ {}_J|=_G \Phi$.

Покажемо: $\mathrm{A}\vee\mathrm{B}\ {}_J|=_G \Phi \Rightarrow \mathrm{A}\ {}_J|=_G \Phi$ та $\mathrm{B}\ {}_J|=_G \Phi$. Розглядаємо області невизначеності.

Згідно з $\mathrm{A}\vee\mathrm{B}\ {}_J|=_G \Phi$ маємо $\bot(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$ та $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J) \cup F(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J)$.

Маємо $\bot(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J) = (F(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\mathrm{A}_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J))$, звідки

$(F(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\mathrm{A}_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$.

Але $T(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J) \subseteq T(\mathrm{A}_J) \subseteq T(\mathrm{A}_J) \cup T(\mathrm{B}_J) \subseteq T(\Phi_J)$, тому

$(F(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\mathrm{A}_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \cup (T(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$

$\Leftrightarrow ((F(\mathrm{A}_J) \cup \bot(\mathrm{A}_J) \cup T(\mathrm{A}_J)) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\mathrm{A}_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bot(\mathrm{B}_J) \cup (\bot(\mathrm{A}_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$, звідки $\bot(\mathrm{B}_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$.

Аналогічно маємо $T(\mathrm{B}_J) \cap \bot(\mathrm{A}_J) \subseteq T(\mathrm{B}_J) \subseteq T(\mathrm{A}_J) \cup T(\mathrm{B}_J) \subseteq T(\Phi_J)$, тому

$(F(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\mathrm{A}_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \cup (\bot(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \cup (T(\mathrm{B}_J) \cap \bot(\mathrm{A}_J)) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((F(\mathrm{B}_J) \cup \bot(\mathrm{B}_J) \cup T(\mathrm{B}_J)) \cap \bot(\mathrm{A}_J)) \cup (F(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bot(\mathrm{A}_J) \cup (F(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J)) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$, звідки $\bot(\mathrm{A}_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$.

Маємо $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J) \cup F(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J) = (F(\mathrm{A}_J) \cup \bot(\mathrm{A}_J)) \cap (F(\mathrm{B}_J) \cup \bot(\mathrm{B}_J))$. Звідси $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\mathrm{A}_J) \cup F(\mathrm{A}_J)$ та $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\mathrm{B}_J) \cup F(\mathrm{B}_J)$.

Таким чином, $\mathrm{A}\vee\mathrm{B}\ {}_J|=_G \Phi \;\Rightarrow\; \mathrm{A}\ {}_J|=_G \Phi$ та $\mathrm{B}\ {}_J|=_G \Phi$.

Тепер покажемо: $\mathrm{A}\ {}_J|=_G \Phi$ та $\mathrm{B}\ {}_J|=_G \Phi \;\Rightarrow\; \mathrm{A}\vee\mathrm{B}\ {}_J|=_G \Phi$.

Достатньо розглянути області невизначеності.

Згідно з $\mathrm{A}\ {}_J|=_G \Phi$ та $\mathrm{B}\ {}_J|=_G \Phi$ маємо: $\bot(\mathrm{A}_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$, $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\mathrm{A}_J) \cup F(\mathrm{A}_J)$, $\bot(\mathrm{B}_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$, $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\mathrm{B}_J) \cup (\mathrm{B}_J)$.

Треба показати: $\bot(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$ та $\bot(\Phi_J) \subseteq \bot(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J) \cup F(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J)$.

Маємо $\bot(\mathrm{B}_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J) \Rightarrow F(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$ та

$\bot(\mathrm{A}_J) \cap \bot(\mathrm{B}_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$;

$\bot(\mathrm{A}_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J) \Rightarrow \bot(\mathrm{A}_J) \cap F(\mathrm{B}_J) \subseteq \bot(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$.

Звідси отримуємо:
$\perp(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J) = (F(\mathrm{A}_J)\cap\perp(\mathrm{B}_J))\cup(\perp(\mathrm{A}_J)\cap F(\mathrm{B}_J))\cup(\perp(\mathrm{A}_J)\cap\perp(\mathrm{B}_J))\subseteq \perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$.

Із умови $\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(\mathrm{A}_J)\cup F(\mathrm{A}_J)$ та $\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(\mathrm{B}_J)\cup F(\mathrm{B}_J)$ отримуємо $\perp(\Phi_J)\subseteq(\perp(\mathrm{A}_J)\cup F(\mathrm{A}_J))\cap(\perp(\mathrm{B}_J)\cup F(\mathrm{B}_J))$. Водночас маємо $\perp(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J)\cup F(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J) =$
$= (\perp(\mathrm{A}_J)\cup F(\mathrm{A}_J))\cap(\perp(\mathrm{B}_J)\cup F(\mathrm{B}_J))$, тому $\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J)\cup F(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}_J)$.

Подібним чином доводиться

Теорема 5. $\Gamma_J|=_G\neg(\mathrm{P}\vee\mathrm{Q}) \Leftrightarrow \Gamma_J|=_G\neg\mathrm{P}$ та $\Gamma_J|=_G\neg\mathrm{Q}$.

Наслідок 4. $\mathrm{A}\vee\mathrm{B}\,|=_G\Phi \Leftrightarrow \mathrm{A}\,|=_G\Phi$ та $\mathrm{B}\,|=_G\Phi$; $\Gamma\,|=_G\neg(\mathrm{P}\vee\mathrm{Q}) \Leftrightarrow \Gamma\,|=_G\neg\mathrm{P}$ та $\Gamma\,|=_G\neg\mathrm{Q}$.

Основою еквівалентних перетворень формул є теорема еквівалентності.

Теорема 6. Нехай формула Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень $\Phi_1,..., \Phi_n$ на $\Psi_1,..., \Psi_n$ відповідно. Якщо $\Phi_1\sim_G\Psi_1, ..., \Phi_n\sim_G\Psi_n$, то $\Phi\sim_G\Phi'$.

Теорему доводимо індукцією за побудовою формули. Для цього доведення використовуємо наступне твердження:

Теорема 7. 1) Нехай $\Phi\sim_G\vartheta$, тоді $\neg\Phi\sim_G\neg\vartheta$;

2) нехай $\Phi\sim_G\vartheta$ та $\Psi\sim_G\Xi$, тоді $\vee\Phi\Psi\sim_G\vee\vartheta\Xi$;

3) нехай $\Phi\sim_G\vartheta$, тоді $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi \,\square_G\, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\vartheta$;

4) нехай $\Phi\sim_G\vartheta$, тоді $\exists x\Phi\sim_G\exists x\vartheta$.

Доведемо для прикладу п.4. Нехай J – довільна інтерпретація.

Із умови $\Phi\sim_G\vartheta$ маємо: $T(\Phi_J) = T(\vartheta_J)$, $F(\Phi_J) = F(\vartheta_J)$;

$\perp(\Phi_J)\subseteq T(\vartheta_J)\cup\perp(\vartheta_J)$, $\perp(\Phi_J)\subseteq F(\vartheta_J)\cup\perp(\vartheta_J)$,

$\perp(\vartheta_J)\subseteq T(\Phi_J)\cup\perp(\Phi_J)$, $\perp(\vartheta_J)\subseteq F(\Phi_J)\cup\perp(\Phi_J)$.

Треба показати: $\perp(\exists x\Phi_J)\subseteq T(\exists x\vartheta_J)\cup\perp(\exists x\vartheta_J)$, $\perp(\exists x\Phi_J)\subseteq F(\exists x\vartheta_J)\cup\perp(\exists x\vartheta_J)$,

$\perp(\exists x\vartheta_J)\subseteq T(\exists x\Phi_J)\cup\perp(\exists x\Phi_J)$, $\perp(\exists x\vartheta_J)\subseteq F(\exists x\Phi_J)\cup\perp(\exists x\Phi_J)$.

Покажемо перші два співвідношення, третє та четверте доводяться ідентично.

Маємо $d\in\perp(\exists x\Phi_J) \Leftrightarrow d\nabla x\mapsto a\in\perp(\Phi_J)\cup F(\Phi_J)$ для всіх $a\in A$ та $d\nabla x\mapsto b\in\perp(\Phi_J)$, для деякого $b\in A \Rightarrow d\nabla x\mapsto b\in\perp(\Phi_J)$, для деякого $b\in A \Rightarrow$ згідно з $\perp(\Phi_J)\subseteq T(\vartheta_J)\cup\perp(\vartheta_J)$ маємо $d\nabla x\mapsto b\in T(\vartheta_J)\cup\perp(\vartheta_J))$ для деякого $b\in A \Leftrightarrow d\in T(\exists x\vartheta_J)\cup\perp(\exists x\vartheta_J)$. Таким чином, $\perp(\exists x\Phi_J)\subseteq T(\exists x\vartheta_J)\cup\perp(\exists x\vartheta_J)$.

Маємо $d\in\perp(\exists x\Phi_J) \Leftrightarrow d\nabla x\mapsto a\in\perp(\Phi_J)\cup F(\Phi_J)$ для всіх $a\in A$ та $d\nabla x\mapsto b\in\perp(\Phi_J)$ для деякого $b\in A \Rightarrow d\nabla x\mapsto a\in\perp(\Phi_J)\cup F(\Phi_J)$ для всіх $a\in A \Rightarrow$ згідно з $\perp(\Phi_J)\subseteq F(\vartheta_J)\cup\perp(\vartheta_J)$, тоді $d\nabla x\mapsto a\in F(\vartheta_J)\cup\perp(\vartheta_J)\cup F(\Phi_J)$ для всіх $a\in A \Leftrightarrow d\nabla x\mapsto a\in F(\vartheta_J)\cup\perp(\vartheta_J)$ для всіх $a\in A$ (адже $F(\vartheta_J) = F(\Phi_J)$) $\Leftrightarrow d\in F(\exists x\vartheta_J)\cup\perp(\exists x\vartheta_J)$. Таким чином, $\perp(\exists x\Phi_J)\subseteq F(\exists x\vartheta_J)\cup\perp(\exists x\vartheta_J)$.

Властивості декомпозиції формул індукують відповідні властивості відношення логічного наслідку для множин формул, що дає змогу будувати для логік *GND*-предикатів числення секвенційного типу.

Властивості відношення логічного наслідку для множин формул, зокрема, властивості елімінації кванторів, будуть описані в наступних роботах.

Висновки

У роботі запропоновано та досліджено новий клас програмно-орієнтованих логічіних формалізмів – логіки загальних недетермінованих квазіарних предикатів, які названо *GND*-предикатами. Такі предикати є узагальненням відомих часткових неоднозначних предикатів реляційного типу. *GND*-предикати можна моделювати як 7-значні тотальні детерміновані предикати, які названо *TD*7-предикатами. Розглянуто композиції *GND*-предикатів, наведено їх характерні властивості.

Описано мови чистих першопорядкових логік *GND*-предикатів та їх інтерпретації. Введено відношення логічного *G*-наслідку та логічної *G*-еквівалентності.

Відношення логічного *G*-наслідку є монотонним, рефлексивним і транзитивним, для нього виконуються закон контрапозиції та властивості декомпозиції формул. Це дає змогу в подальшому побудувати для логік *GND*-предикатів низку числень секвенційного типу.

Література

1. Handbook of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T.S.E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5, 1993–2000.
2. Нікітченко М.С. Прикладна логіка / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
3. Нікітченко М.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів / М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 73–86.
4. Mykola Nikitchenko and Stepan Shkilniak. Algebras and logics of partial quasiary predicates // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 23 (2017). Number 2, pp. 263–278.
5. Hähnle, R. Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. Logic Journal of the IGPL, **13** (2005). P. 415–433.
6. Jones, C. Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In: Proceedings of AVoCS'05. Vol. 145. Elsevier, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (2006). P. 3–25.
7. Gries, D., Schneider, F. Avoiding the undefined by underspecification. Technical report, Ithaca, NY, USA (1995).
8. Duzi, M. Do we have to deal with partiality? Miscellanea Logica, **5** (2003). P. 45–76.
9. A. Avron, A. Zamansky. Non-deterministic semantics for logical systems, in Handbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.), 2nd ed. Vol. 16 (2011). Springer Netherlands. P. 227–304.
10. Béziau, J.-Y. 13 questions about universal logic. Bulletin of the Section of Logic, 35(2/3) (2006). P. 133–150.
11. Béziau, J.-Y. (ed.). Universal Logic: an Anthology. Studies in Universal Logic. Springer Basel (2012).
12. M.S. Nikitchenko, O.S. Shkilniak and S.S. Shkilniak. Logics of partial non-deterministic predicates // PDMU-2017: international conference: abstracts. – Vilnius, Lithuania, pp. 94–95.

Literatura

1. Handbook of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T.S.E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5, 1993–2000.
2. Nikitchenko M.S. Prykladna logika / M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak. – К.: VPC Kyivskyi universytet, 2013. – 278 p.
3. Nikitchenko M.S. Chysti pershoporiadkovi logiky kvaziarnyh predykativ / M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak // Probl. programuvannia. – 2016. – № 2–3. – P. 73–86.
4. Mykola Nikitchenko and Stepan Shkilniak. Algebras and logics of partial quasiary predicates // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 23 (2017). Number 2, pp. 263–278.
5. Hähnle, R. Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. Logic Journal of the IGPL, **13** (2005). P. 415–433.
6. Jones, C. Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In: Proceedings of AVoCS'05. Vol. 145. Elsevier, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (2006). P. 3–25.
7. Gries, D., Schneider, F. Avoiding the undefined by underspecification. Technical report, Ithaca, NY, USA (1995).
8. Duzi, M. Do we have to deal with partiality? Miscellanea Logica, **5** (2003). P. 45–76.
9. A. Avron, A. Zamansky. Non-deterministic semantics for logical systems, in Handbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.), 2nd ed. Vol. 16 (2011). Springer Netherlands. P. 227–304.
10. Béziau, J.-Y. 13 questions about universal logic. Bulletin of the Section of Logic, 35(2/3) (2006). P. 133–150.
11. Béziau, J.-Y. (ed.). Universal Logic: an Anthology. Studies in Universal Logic. Springer Basel (2012).
12. M.S. Nikitchenko, O.S. Shkilniak and S.S. Shkilniak. Logics of partial non-deterministic predicates // PDMU-2017: international conference: abstracts. – Vilnius, Lithuania, pp. 94–95.

RESUME

M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak

Semantic properties of logics of general non-deterministic predicates

Last decades many logical systems have been developed, which are successfully used in the systems of artificial intelligence and programming. Such systems are usually based on the classical predicate logic. However, classical logic has fundamental limitations, it is based on traditional mathematical structures of single-valued total finitary mappings, but for programming and artificial intelligence systems the use of partial non-deterministic mappings over incomplete data is quite characteristic. Therefore, the problem of building new program-oriented logical formalisms based on such mappings becomes urgent. In this paper, we propose new classes of such formalisms: composition-nominative logics of general non-deterministic quasiary predicates; they are called *GND*-predicates. These predicates are a generalization of known partial non-deterministic relational predicates – *R*-predicates. Each *R*-predicate is specified by two sets: the truth and the falsity domains. To describe the *GND*-predicate three sets are already needed: truth, falsity, and underfinedness domains.

GND-predicates can be modeled as 7-valued total deterministic predicates, which are called *TD*7-predicates. Isomorphism of compositional algebras of *GND*-predicates and *TD*7-predicates is shown. Compositions of *GND*-predicates are investigated; their characteristic properties are presented. It is shown that the coincidence of truth and falsity domains of *GND*-predicates does not yet mean coincidence of underfinedness domains. The languages of pure first-order logics of *GND*-predicates and their interpretations are described. The relation of the logical *G*-consequence $|=_G$ and the logical G-equivalence $\sim_G$ are introduced. The equivalence theorem is proved for the relation $\sim_G$. The relation $|=_G$ is monotone, reflexive, and transitive; the contraposition law and decomposition properties of formulas hold for such logics. This will lead to construction of a calculus of sequent type the logics of *GND*-predicates.

Надійшла до редакції 24.09.2017

